

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM DA ESTEIRA DE UM ESCOAMENTO
AO REDOR DE UM CILINDRO ESBELTO: MODELO
NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE GINZBURG-LANDAU

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Graduação em Engenharia

Bruno Marquetti Vanzetto

Orientador: Prof. Dr. José A. P. Aranha

São Paulo
2005

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM DA ESTEIRA DE UM ESCOAMENTO
AO REDOR DE UM CILINDRO ESBELTO: MODELO
NUMÉRICO DA EQUAÇÃO DE GINZBURG-LANDAU

Trabalho de formatura apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Graduação em Engenharia

Bruno Marquetti Vanzetto

Orientador: Prof. Dr. José A. P. Aranha

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

São Paulo
2005

TF_05
V396 m

FICHA CATALOGRÁFICA

Vanzetto, Bruno Marquetti

Modelagem da esteira de um escoamento ao redor de um cilindro esbelto: modelo numérico da equação de Ginzburg-Landau / B.M. Vanzetto. – São Paulo, 2005.

p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Mecânica dos fluidos 2.Derivadas parciais 3.Escoamento 4.Vórtices dos líquidos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600011159

Resumo

O escopo deste projeto abrange o estudo da esteira de um cilindro esbelto. A emissão de vórtices alternados na esteira é responsável por forças cíclicas em cilindros. “Risers”, que são corpos flexíveis e cilíndricos ficam sujeitos à fadiga quando submetidos a essas forças. O objetivo deste projeto é modelar a emissão de vórtices na esteira pela discretização da equação de Ginzburg-Landau. Para isso foram elaborados métodos numéricos de diferenças finitas do tipo explícito e semi-implícito, sendo que apenas o semi-implícito rendeu bons resultados. Este método foi restrito a $100 < Re < 300$, para que os resultados fossem comparados com os de publicações. Esses resultados foram satisfatórios qualitativamente e quantitativamente. Desta forma foi validado o método numérico construído.

Abstract

The issue of this work encloses the study of a slender cylinder wake. The production of oscillating vortex on the wake gives rise to cyclical transverse forces on the cylinder. "Risers", which are flexible and cylindrical bodies, when submitted to those forces, can fail due to fatigue. The goal of this work is to model the produce of vortex by the discretization of the Ginzburg Landau equation. For this, it was done numerical methods of finite differences of the explicit and semi-implicit kinds, of which only the semi-implicit yielded good results. This method was limited to $100 < Re < 300$ interval in order to compare the publications results. The results were good qualitatively and quantitatively. Thus, it was achieved the validation of the numerical built method.

Sumário

1.	Introdução	1
1.1.	Análise preliminar quanto á fadiga de “risers”	2
2.	Objetivo	5
3.	Descrição do fenômeno de transição	5
3.1.	Abordagens para Modelagem do desprendimento de vórtices	7
4.	Resumo da Publicação ²	7
4.1.	Características mais importantes dos experimentos	7
4.2.	Resultados experimentais	8
4.3.	Resultados Numéricos	10
5.	Equação de Ginzburg-Landau partindo-se das equações de Navier Stokes	12
5.1.	Equação de Landau	20
5.1.1.	Aproximações	20
5.1.2.	Cálculo dos termos \dot{q}_r , \ddot{q}_r e \dot{q}_r^3	21
5.2.	EGL – Re-escala	23
6.	Construção do Modelo Numérico da equação de Ginzburg-Landau	26
6.2.1.	Condições Iniciais	29
6.2.2.	Discretização no tempo	31
6.2.3.	Crank-Nicholson semi-implícito	34
6.2.4.	Condições de contorno	35
7.	Resultados obtidos de simulações com método semi-implícito	37
8.	Condições de contorno periódicas	43
8.1.1.	Resultados de simulações com condições de contorno periódicas	44
9.	Conclusões	49
10.	Referências bibliográficas	50

1. Introdução

Problemas com “risers”, usados em plataformas de prospecção de petróleo em alto-mar, têm, ultimamente, se tornado preocupantes. Têm sido feitas baixas estimativas da “vida útil” quanto à fadiga do material do “riser”, já que este fica submetido a excitações periódicas quando sujeito às correntes marítimas.

“Risers” são dutos cilíndricos, que unem os poços localizados no fundo do mar com os sistemas flutuantes. Possuem grande flexibilidade, pois tem comprimento da ordem de 1000m e são feitos de aço API. São, em geral, lançados em configuração catenária.

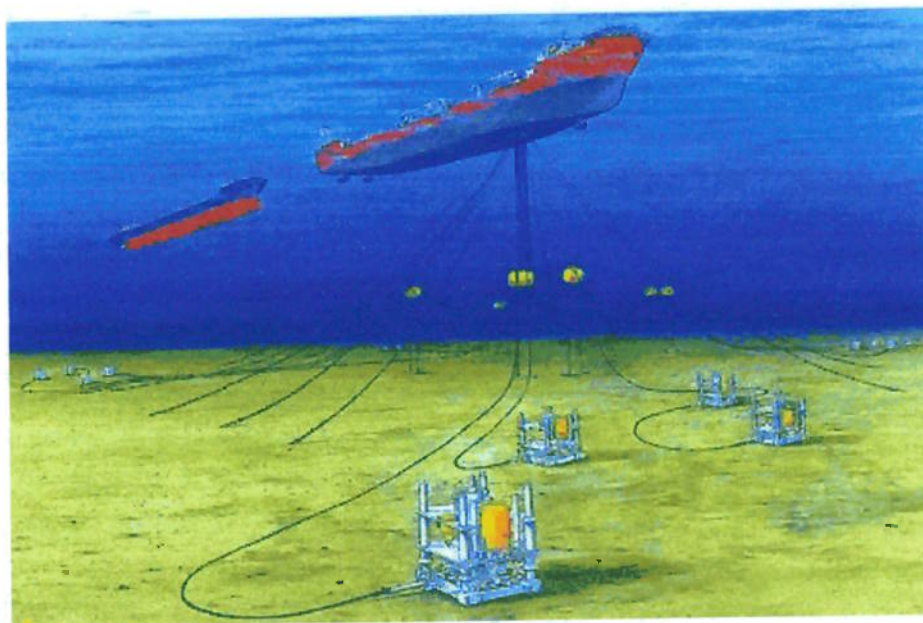


Figura 1 - Diagrama de um sistema flutuante ancorado mostrando vários poços de prospecção.

O fenômeno observado, que é a causa das excitações periódicas no “riser”, é o desprendimento espontâneo de vórtices em sua esteira. Eles são emitidos de suas faces, superior e inferior, de forma alternada e com frequência característica, induzindo

vibrações na direção perpendicular à direção do escoamento das correntes marítimas. Essas vibrações são denominadas “**vibrações induzidas por vórtices**” (VIV). A emissão de vórtices ocorre na esteira de qualquer corpo rombudo, porém possuem características periódicas apenas os emitidos por corpos de seção transversal circular.

1.1. Análise preliminar quanto á fadiga de “risers”

Considere-se um fluido escoando com velocidade U na direção horizontal e incidindo sobre uma estrutura cilíndrica elástica (um “riser”), com diâmetro característico D .

Seja $\omega_s = U/D$ a frequência dos vórtices emitidos do cilindro, denominada “**frequência de Strouhal**”.

Suponha-se que a estrutura cilíndrica tenha frequências naturais ω_n ; nesta situação observa-se que, quando $\omega_s \approx \omega_n$, surge o fenômeno de VIV. Além de **espontâneas** essas vibrações são **auto-limitadas**: a velocidade transversal induzida no fluido pelo movimento da estrutura é da ordem de $\omega_n A$, onde A é a amplitude de oscilação, e não pode ser muito maior que a velocidade U do escoamento, pois, caso contrário, o movimento da estrutura destruiria a carreira de vórtices que o origina; das relações $\omega_n \approx \omega_s$ e $\omega_n A \approx U$ conclui-se que $A \approx D$, ou seja: a amplitude da oscilação é da ordem do diâmetro da estrutura.

A rigidez transversal de um “riser” é essencialmente devido à tração $T(z)$ que varia, devido ao peso próprio, com a cota z da seção; a velocidade da onda transversal no “riser” é, portanto localmente dada por

$$c(z) = \sqrt{\frac{T(z)}{m_r + m_a}}$$

onde m_r é a massa por unidade de comprimento do “riser” e $m_a = \rho \pi D^2 / 4$ é a massa adicional; caracteristicamente a tração $T(z)$ é da ordem do peso próprio submerso do “riser” e se h for a profundidade do mar tem-se

$$c \approx \left(\frac{m_r - m_a}{m_r + m_a} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{gh}$$

O n-ésimo modo natural de vibração pode ser aproximado por uma expressão da forma

$$y_n(z) = A \cdot \text{sen}(k_n(z) \cdot z)$$

$$k_n(z) = \frac{\omega_n}{c(z)},$$

e a deformação flexional $\varepsilon(z)$, fundamental na avaliação da integridade estrutural do “riser”, é igual à curvatura multiplicada pelo raio $D/2$ da seção transversal; observando as relações $A \approx D$ e $\omega_n \approx \omega_s$ (e ignorando a variação de $k_n(z)$) obtém-se

$$\varepsilon(z) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{U}{c(z)} \right)^2.$$

Em águas profundas ($h > 500$ m) a velocidade c da onda transversal no “riser” é da ordem de 40 m/s na região do “touchdown”, isto é, na região mais próxima ao fundo do mar; supondo uma corrente marítima com intensidade $U = 2$ nós (≈ 1 m/s) tem-se $\varepsilon \approx 1/3200$, um valor cerca de 6 vezes menor que o valor limite ε_o da deformação no aço, em geral estipulada igual a 0,2%.

O problema associado ao VIV não desempenha, portanto papel relevante no que toca as tensões limites no “riser”, mas pode ser importante no estudo da fadiga do material. De fato, o número de ciclos N que um aço API suporta sob uma deformação cíclica de amplitude ε é dado pela expressão

$$N \cong 2 \times 10^6 \left(\frac{\varepsilon_o}{2\varepsilon} \right)^{4,38}$$

resultando em uma “vida útil” em anos que pode ser escrita na forma

$$(VU)_{ANOS} \cong 1.4 \times 10^{-15} \frac{D}{c} \left(\frac{c}{U} \right)^{9,76},$$

com o diâmetro D expresso em metros e a velocidade c em m/s.

Utilizando os valores $c \approx 40 \text{ m/s}$, $U \approx 1 \text{ m/s}$ e $D \approx 0.40 \text{ m}$, característicos no problema sob consideração, obtém-se $(VU) \approx 22$ dias, um valor para a “vida útil” muito menor que o usualmente estipulado pelas Sociedades Classificadoras (cerca de 200 anos).

Do exposto, as seguintes conclusões gerais podem ser derivadas:

A deformação flexional causada pelo VIV diminui com o aumento da profundidade do mar (com o aumento da velocidade c);

- A deformação, e, portanto o dano acumulado, tende a aumentar a medida que a tração $T(z)$ diminui, ou seja, à medida que a seção transversal de aproxima do fundo do mar;
- A deformação aumenta com o quadrado da intensidade da corrente marítima e a “vida útil” diminui com o fator $U^{-9,76}$;
- Da expressão $k_n = \omega_n / c$, com $k_n \approx n\pi / h$ e $\omega_n / c \approx U / cD$, obtém-se $n \approx \frac{Uh}{\pi cD} \approx 20$: as vibrações induzidas por emissão de vórtices tendem a excitar modos altos de vibração do “riser”, quando provavelmente a influência da rigidez flexional já deve se tornar relevante;
- Se $l \approx h$ for o comprimento suspenso do “riser” e λ for o comprimento de onda do modo excitado, tipicamente tem-se $\lambda / l \approx 1 / 20$;
- O fenômeno de VIV introduz deformações dinâmicas muito menores que a deformação limite do aço; ele tem importância prática somente no estudo da fadiga do material;
- A fadiga devida à emissão de vórtices é preocupante.

Vários fatores, não considerados nesta análise inicial, devem atenuar a influência do VIV na “vida útil” do material. O principal deles é que a velocidade da corrente marítima diminui, em geral, com a profundidade e, mais ainda, quando o “riser” é lançado em uma configuração de catenária a componente desta velocidade na direção normal é pequena nas vizinhanças do ponto de “touchdown”. De outro lado, é evidente que o problema sob consideração necessita ser estudado com cuidado:

uma avaliação preliminar, como a acima feita, tenderia a inviabilizar o uso destas estruturas oceânicas.

2. Objetivo

O presente estudo faz parte de um bem maior que tem sido desenvolvido no NDF. O objetivo final é a construção de um modelo para o fenômeno de VIV, para que contribuições sejam dadas na compreensão completa do fenômeno, além de permitir que soluções viáveis possam ser implementadas para o problema com “risers”.

O objetivo deste estudo em particular é o desenvolvimento de um modelo numérico que recupere os resultados do estudo da primeira transição na esteira, que são apresentados na publicação Provansal², e posteriormente extrapolar a faixa de valores de parâmetros e usar outras condições de contorno.

3. Descrição do fenômeno de transição

Será estudada a transição entre padrões de emissão de vórtices que variam conforme se aumenta o número de Reynolds. Observa-se que, para $45 < Re < 200$, estabelece-se um padrão de emissão ordenado e periódico, no qual vórtices são emitidos paralelamente ao cilindro; é denominado “parallel shedding”.

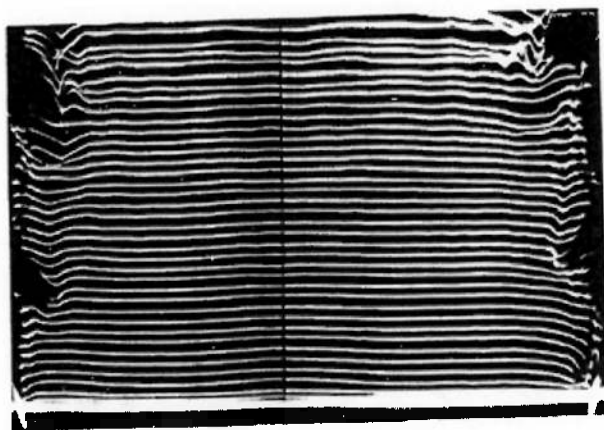


Figura 2 – Visualização do desprendimento de vórtices emitidos paralelamente.

Para $200 < Re < 300$ estabelece-se um estado pouco ordenado de transição, no qual coexistem dois modos, denominados A e A*, associados a duas frequências que predominam no fenômeno.

Essa transição apresenta uma histerese. Quando diminuimos o número de Reynolds a esteira se reestabiliza em um modo periódico apenas a uma distância abaixo de 200.

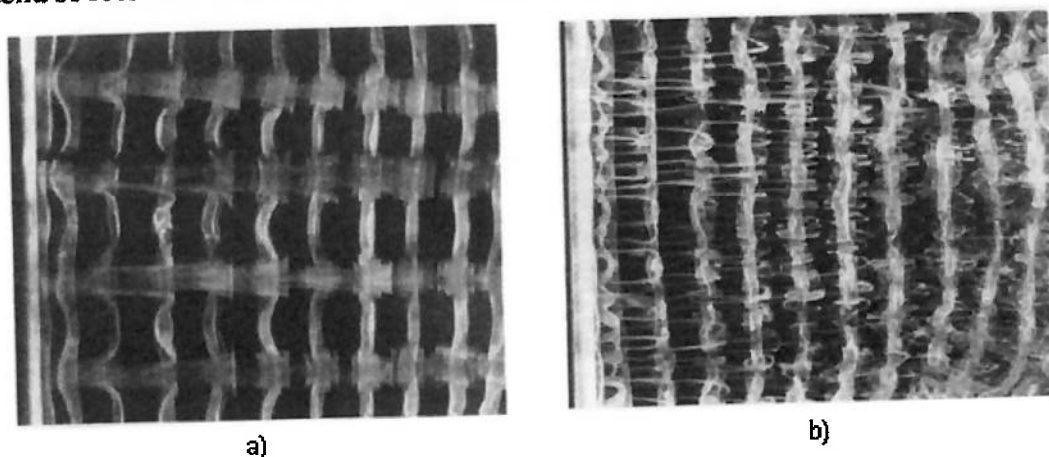


Figura 3 – Visualização da esteira no escoamento ao redor de um cilindro visto em planta: a) $Re \approx 200$ b) $Re \approx 230$

Após essa faixa transição estabelece-se novamente um estado periódico ordenado denominado modo B.

3.1. Abordagens para Modelagem do desprendimento de vórtices

Usando-se as ferramentas de CFD (Dinâmica dos Fluidos Computacional) atuais, não tem sido possível recuperar o fenômeno de histerese. Os resultados que se observa na transição recupera apenas uma das frequências, a referente ao modo A.

A histerese na transição pode ser recuperada utilizando-se **modelos fenomenológicos**, uma abordagem que toma modelos de outros fenômenos e os ajusta externamente ao fenômeno em questão.

Em muitas outras áreas há fenômenos com características semelhantes às do desprendimento de vórtices: **oscilações auto-sustentadas e auto-limitadas**. Os

parâmetros dos modelos desses outros fenômenos são ajustados por experimentos ou métodos numéricos.

O presente estudo é baseado nos resultados de um modelo fenomenológico. A equação usada desse modelo é a de **Ginzburg-Landau**, que será descrita mais adiante.

4. Resumo da Publicação²

A equação de Ginzburg-Landau, que é conhecida por modelar bem o fenômeno de emissão no regime periódico, é usada obtém para a região de transição. Os resultados numéricos apresentam boa concordância com resultados experimentais.

O corpo rombudo usado foi um anel e, apenas para comparação, foram feitos experimentos com um cilindro.

A escolha do anel foi devida ao fato da ausência de efeitos de borda. Nos experimentos com o cilindro condições de contorno especiais foram garantidas para inibição de vortex shedding oblíquos.

4.1. Características mais importantes dos experimentos

Anel

- Meio fluido: ar.
- Experimentos foram feitos em túnel de vento.
- Anel fixado a 15 cm da entrada do túnel de vento.
- Razões de aspecto usadas : $50 < \frac{\pi D}{d} < 100$
- As velocidades foram medidas em pontos fora da linha de centro.

Cilindro

A razão de aspecto: $L/d=78$.

4.2. Resultados experimentais

Anel

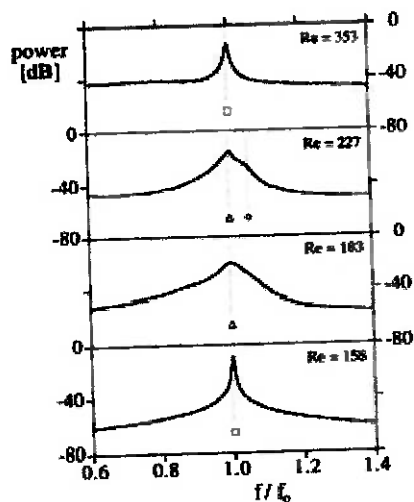


Figura 4 – Espectro do campo de velocidades longitudinal da esteira de um anel de razão de aspecto $\frac{\pi D}{d} = 59$ (média tomada em tempo longo). O: modo periódico; Δ : modo A^* ; \square : modo B.

- Para $Re < 160$ o espectro da velocidade são picos finos. A partir de $Re \approx 180$ velocidade passam a ser irregulares e caóticas e o espectro sofre um alargamento.
- Um segundo pico aparece para $Re > 180$. Sua intensidade é fraca e nunca excede a do primeiro pico.
- Para $Re \approx 300$ a largura do espectro diminui formando-se um único pico fino e o modo periódico se restabelece novamente.

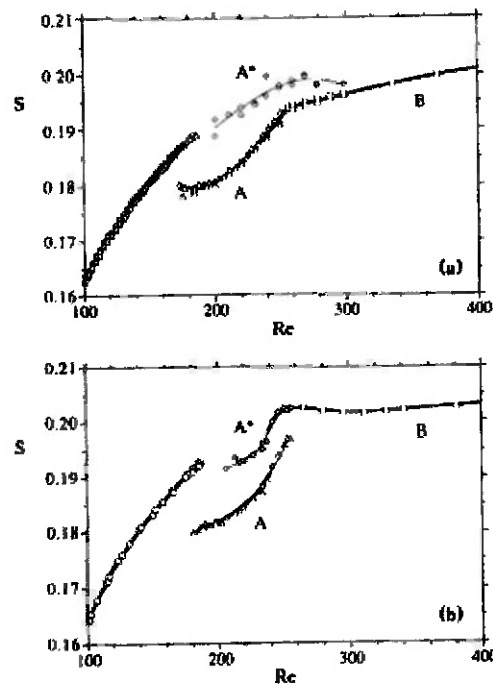


Figura 5 – número de Strouhal, $S = \frac{f_o d}{U}$, em função de Re na faixa de transição. (a)

Anel, razão de aspecto $\frac{\pi D}{d} = 59$; (b) cilindro circular, razão de aspecto $\frac{L}{d} = 78$.

- A curva $S \times Re$ apresenta uma descontinuidade para $Re \approx 190$ e uma descontinuidade em sua inclinação para $Re \approx 260$.
- O modo A^* corresponde ao segundo pico que surge no espectro para $Re > 180$. Ele se alinha bem com a curva periódica.

Cilindro

Apresenta, qualitativamente, quase todos os resultados iguais aos do anel, com apenas duas diferenças:

- Apresenta uma segunda descontinuidade em $Re \approx 260$.
- Apresenta modo B mais coerente.

Aparentemente as diferenças de resultados entre o anel e o cilindro são devido a diferentes condições de contorno, pois a razão de aspecto do anel, $\frac{\pi D}{d}$, é grande e, portanto, se comporta quase como o cilindro.

4.3. Resultados Numéricos

Condições de contorno para o modelo numérico da equação de Ginzburg-Landau:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \sigma A - \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mu |A|^2 A = 0$$

- **Cilindro:** $A = 0$ nos extremos (sugerida).
- **Anel:** Periódica.

Comprimento do domínio em z : $L = 100$

Experimentalmente determinou-se a seguinte lei de parâmetros:

$$c_2 = \begin{cases} -3 & \text{para } R_e \leq 100 \\ -4,1 + 0,011R_e & \text{para } R_e > 100 \end{cases}$$

$$R_0 = -5,125 + 0,215R_e$$

$$k = 0,2$$

$$c_1 = c_2 + 2,7$$

$$c_o = \frac{2\pi}{k} \frac{R_0}{R_e - R_{ec}} + c_2$$

De simulações foram feitas para o anel foram obtidos os seguintes resultados de espectros:

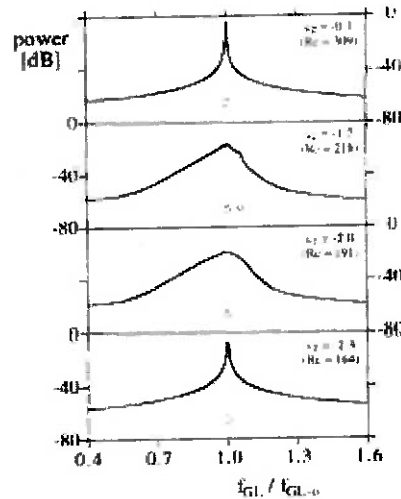


Figura 6 – Spectro no tempo da amplitude $A(z,t)$ da equação de Ginzburg-Landau obtido de simulações numéricas com c_0 , c_1 , c_2 , k indicados e $L = 100$.

Observa-se que a primeira descontinuidade foi recuperada, mas a mudança na inclinação na passagem do modo A para o modo B é bem menos pronunciada.

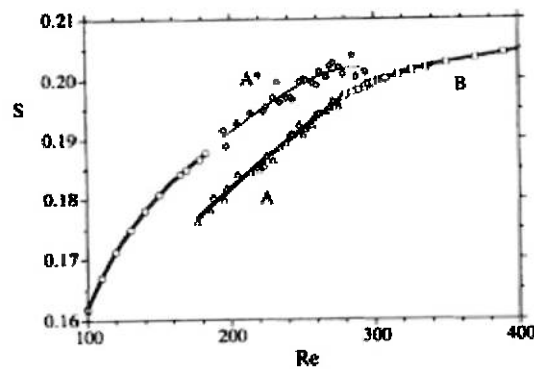


Figura 7 – Relação entre S-Re resultante do modelo de GL. O número de Strouhal

$$\text{foi calculado como } S = \frac{R_o}{R_e} = \left(\frac{k}{2\pi} \right) f_{GL} \left(\frac{Re - Re_c}{Re} \right).$$

5. Equação de Ginzburg-Landau partindo-se das equações de Navier Stokes.

Para uma melhor compreensão da física básica que controla o fenômeno e do significado de parâmetros a variáveis envolvidas será apresentada uma dedução superficial da equação de Ginzburg-Landau partindo-se das equações de Navier Stokes na forma discreta (para uma dedução mais detalhada ver [4]).

Equações de Navier Stokes: forma discreta

$$\begin{cases} M\dot{U} + KU + N(U)U - RP = F_{ext} \\ R^T U = 0 \end{cases}$$

Tomando-se espaço de estados solenoidal, temos

$$U = \sum_{r=1}^n x_r T_r$$

o que resulta

$$RP = 0$$

E as equações, reescritas, ficam

$$M_n \dot{x} + K_n x + N_n(x)x = 0$$

Podemos reescrever essa equação, para um dado valor de Re , na forma de n equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{X} = \vec{F}(X)}$$

Como estamos interessados em conhecer a estabilidade do sistema no entorno do equilíbrio, podemos dar uma pequena perturbação quando o sistema esta na posição de equilíbrio:

$$X = X_{eq} + \delta X$$

$$x_r = f_r(x_r) = f_r(x_{eq_r} + \delta x_r), \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Linearizando \vec{F} em torno da posição de equilíbrio por série de Taylor

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_{1eq}, x_{2eq}, \dots, x_{neq}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{xeq} (\delta x_1) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{xeq} (\delta x_2) + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{xeq} (\delta x_n) + O(\delta X^2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_{1eq}, x_{2eq}, \dots, x_{neq}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{xeq} (\delta x_1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{xeq} (\delta x_2) + \dots + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{xeq} (\delta x_n) + O(\delta X^2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_{1eq}, x_{2eq}, \dots, x_{neq}) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{xeq} (\delta x_1) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{xeq} (\delta x_2) + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{xeq} (\delta x_n) + O(\delta X^2)$$

No ponto de equilíbrio

$$\dot{X}_{eq} = \vec{0}$$

ou

$$f_1(X_{eq}) = f_2(X_{eq}) = \dots = f_n(X_{eq}) = 0$$

O que significa

$$\dot{X} = 0 + \delta \dot{X}$$

$$\dot{X} = \delta \dot{X}$$

Logo, podemos reescrever o sistema de equações acima na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \delta \dot{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{xeq} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{xeq} & \dots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{xeq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{xeq} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{xeq} & \dots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{xeq} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$\delta \dot{X} = (A) \delta X$$

A: matriz Jacobiana.

Obtivemos assim um sistema de n equações lineares de primeira ordem, cuja solução geral é

$$\delta X = e^{\lambda_1 t} E_1 + e^{\lambda_2 t} E_2 + \dots + e^{\lambda_n t} E_n = \sum_{r=1}^n e^{\lambda_r t} E_r$$

e λ_r e E_r são os autovalores e auto-vetores, respectivamente, da matriz Jacobiana, isto é

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

nos dá o conjunto $\{(\lambda_r; E_r); r = 1, 2, \dots, n\}$.

Tanto os autovalores auto-vetores quanto os auto-vetores são, em geral, complexos

$$\lambda_r = \sigma_r + \omega_r i \quad \text{e} \quad E_r = E_{r,real} + i.E_{r,imag}$$

Apenas para fixação de idéias, admitiremos que todos os autovalores sejam distintos, o que implica todos os auto-vetores serem linearmente independentes.

Sabe-se, da observação do escoamento através de um cilindro, que o comportamento da esteira muda conforme mudamos o número de Reynolds:

- **Re abaixo de 45:**

O campo de velocidades na esteira é **estacionário**:

$$X = X_{eq}$$

e **estável**, o que significa todos os autovalores terem parte real negativa:

$$\lambda_r = \sigma_r + \omega_r i$$

$$\sigma_1 < 0; \sigma_2 < 0; \dots; \sigma_n < 0$$

- **Re acima de 45:**

O campo de velocidades estacionário se torna instável, isto é, a menor perturbação tira o campo da configuração estacionária e observa-se uma nova configuração: a formação de vórtices alternados, o que implica um campo de velocidades oscilatório. A amplitude de oscilação é aproximadamente constante, limitada e é auto-sustentada, isto é, não têm agentes externos que impõem a oscilação do campo.

Tal comportamento é conhecido de outros fenômenos físicos e é bem modelado se fizermos duas hipóteses:

Colocando-se em ordem crescente as partes reais dos autovalores $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_n$ para $Re > 45$, mas ainda bem próximo de 45,

- Apenas dois autovalores, $\lambda_1 = \sigma_1 + \omega_1 i$ e o seu conjugado $\lambda_2 = \sigma_1 - \omega_1 i$, passam a ter parte real, σ_1 , positiva e todos os outros autovalores continuem com parte real negativa.
- $\sigma_1 \ll 1$, pois Re está bem próximo de 45.

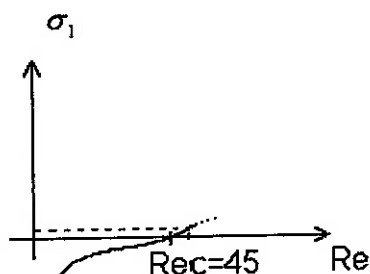


Figura 8 – Parte real do auto-valor positivo em função de Reynolds.

Com essas hipóteses, concluímos que, para $t \rightarrow \infty$

$$e^{\lambda_3 t} E_3 \rightarrow 0$$

$$e^{\lambda_4 t} E_4 \rightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_n t} E_n \rightarrow 0$$

Portanto

$$\delta X = e^{\lambda_1 t} E_1 + e^{\lambda_2 t} E_2$$

Recaímos então em um problema bidimensional, que é representado no plano instável formado por E_1 e E_2 .

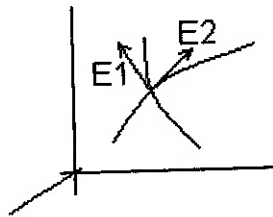


Figura 9 – Plano instável formado pelos dois auto-vetores correspondentes aos autovalores positivos.

Reescrevendo δX

$$\delta X = e^{\lambda_1 t} E_1 + e^{\lambda_2 t} E_2 = e^{(\sigma_1 + \omega_1 i)t} E_1 + e^{(\sigma_1 - \omega_1 i)t} E_2 = e^{\sigma_1 t} e^{i\omega_1 t} (E_{1,real} + i.E_{1,imag}) + e^{\sigma_1 t} e^{-i\omega_1 t} (E_{2,real} + i.E_{2,imag})$$

Resulta, de modo geral

$$q_r = \delta x_r = C e^{\sigma_1 t} \cos \omega_1 t$$

Como $\sigma_1 > 0$, temos que q_r é oscilatório e com amplitude crescente

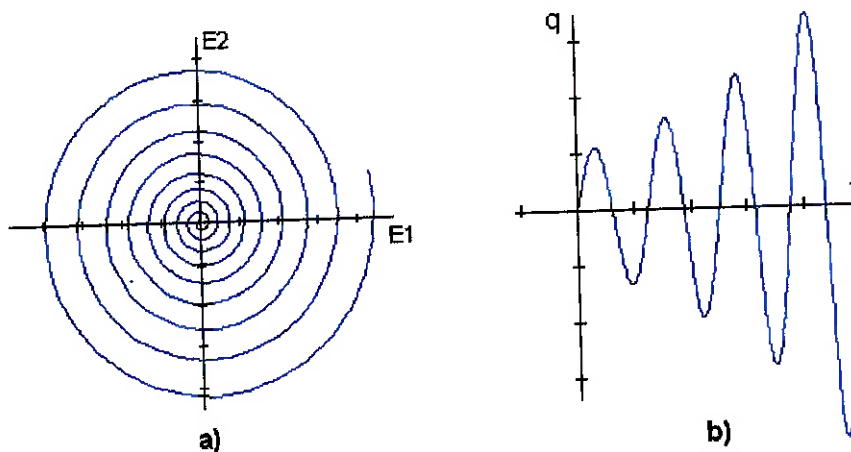


Figura 10 – Evolução de q_r nas vizinhanças do ponto de equilíbrio. (a) Representação no espaço de estados; (b) Representação temporal.

E sua equação diferencial pode ser escrita como

$$\ddot{q}_r - 2\sigma_1 \dot{q}_r + \omega_1^2 q_r = 0 \quad (5.1)$$

Porém esses resultados foram obtidos a partir da solução das equações que foram linearizadas em torno do equilíbrio, e, portanto só validas para pontos próximos ao ponto de equilíbrio.

À medida que nos afastamos do ponto de equilíbrio os termos não lineares passam a alterar a solução. Como a solução em regime é um campo de velocidades oscilatório com amplitude limitada recaímos numa solução do tipo ciclo-limite:

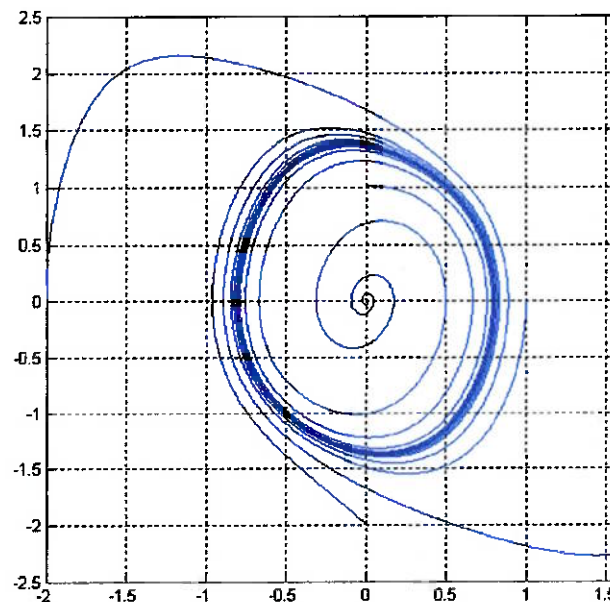


Figura 11 – Ciclo Limite; Evolução de q_r distante da vizinhança do ponto de equilíbrio.

Determinação do termo não linear $N(\dot{q}_r, q_r)$.

Somando $N(q_r, \dot{q}_r)$ à equação (5.1):

$$\ddot{q}_r - 2\sigma_1 \dot{q}_r + \omega_1^2 q_r + N(\dot{q}_r, q_r) = 0 \quad (5.2)$$

e multiplicando-se por \dot{q}_r , ficamos com

$$\ddot{q}_r \dot{q}_r - 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 + \omega_1^2 q_r \dot{q}_r + \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) = 0 \quad (5.3)$$

Integrando a equação (5.3) num período T_c do ciclo limite

$$\int_0^{T_c} \ddot{q}_r \dot{q}_r dt + \int_0^{T_c} \omega_1^2 q_r \dot{q}_r dt + \int_0^{T_c} \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) dt - \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt = 0$$

$$\int_0^{T_c} \frac{\dot{q}_r^2}{2} dt + \int_0^{T_c} \omega_1^2 \frac{q_r^2}{2} dt + \int_0^{T_c} \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) dt - \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt = 0$$

$$\underbrace{\int_0^{T_c} \frac{\dot{q}_r^2}{2} dt + \int_0^{T_c} \omega_1^2 \frac{q_r^2}{2} dt}_{=0, q \text{ periódica}} + \int_0^{T_c} \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) dt - \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt = 0$$

ficamos com

$$\int_0^{T_c} \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) dt = \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt$$

Como

$$\int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt > 0$$

teremos que

$$\int_0^{T_c} \dot{q}_r N(\dot{q}_r, q_r) dt > 0 \quad (5.4)$$

De modo geral, N é um polinômio de q_r e \dot{q}_r , mas se tomarmos um polinômio apenas

de \dot{q}_r :

$$N(\dot{q}_r, q_r) = N_1 \dot{q}_r + N_2 \dot{q}_r^2 + N_3 \dot{q}_r^3 + \dots$$

E desprezarmos o termo linear tomando apenas os termos ímpares

$$N(\dot{q}_r, q_r) = N_3 \dot{q}_r^3 + N_5 \dot{q}_r^5 + N_7 \dot{q}_r^7 + \dots$$

A integral (5.4) ficará sempre positiva.

Como uma primeira aproximação de N , tomaremos apenas o termo cúbico:

$$N(\dot{q}_r, q_r) = \mu \dot{q}_r^3$$

Substituindo em (5.2), resulta

$$\ddot{q}_r - 2\sigma_1 \dot{q}_r + \omega_1^2 q_r + \mu \dot{q}_r^3 = 0$$

Ou

$$\ddot{q}_r + \underbrace{\left(\dot{q}_r^2 - \frac{2\sigma_1}{\mu} \right)}_{\gamma} \dot{q}_r + \omega_1^2 q_r = 0 \quad (5.5)$$

Que é a equação de Van der Pol.

Se γ fosse constante, a solução q_r seria

$$q = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

mas como $\gamma = \left(\dot{q}_r^2 - \frac{2\sigma_1}{\mu} \right)$, é variável

Notamos que

- Se \dot{q}_r é maior que $\frac{2\sigma_1}{\mu}$, γ fica positivo e a solução fica amortecida, fazendo \dot{q}_r diminuir.
- Se \dot{q}_r é menor que $\frac{2\sigma_1}{\mu}$, γ fica negativo e a solução fica superamortecida, fazendo \dot{q}_r aumentar.

Logo a amplitude fica limitada e auto-sustentada.

5.1. Equação de Landau

A equação de Landau pode ser obtida a equação de Van der Pol fazendo-se algumas manipulações algébricas.

Escreve-se q_r como $q_r = \frac{1}{2} (A(t)e^{i\omega t} + A(t)^* e^{-i\omega t})$ onde A é uma variável complexa e função do tempo. Calcula-se \dot{q}_r , \ddot{q}_r , \dot{q}_r^3 e, após algumas aproximações, substitui-se esses termos na equação de Van der Pol.

5.1.1. Aproximações

Serão desprezados termos da ordem de (σ_1^2) , ou superior já que $\sigma_1 \ll 1$.

Substituindo-se

$$N(\dot{q}_r, q_r) = \mu \dot{q}_r^3$$

em

$$\int_0^{T_c} \dot{q}_r \cdot N(\dot{q}_r, q_r) dt = \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt$$

obtem-se

$$\int_0^{T_c} \mu \dot{q}_r^4 dt = \int_0^{T_c} 2\sigma_1 \dot{q}_r^2 dt \quad (5.1.1.1)$$

Em primeira aproximação, o ciclo limite é uma circunferência, logo

$$q_r = A_{CL} \cos \omega t \quad (5.1.1.2)$$

substituindo-se (5.1.1.2) em (5.1.1.1):

$$\mu A_{CL}^4 \omega^4 \int_0^{T_c} \sin^4(\omega t) dt = 2\sigma_1 \omega^2 \int_0^{T_c} \sin^2(\omega t) dt$$

$$\mu A_{CL}^4 \omega^4 = 2\sigma_1 \omega^2$$

$$A_{CL} = \left(\sqrt{\frac{2\sigma_1}{\mu}} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} \right)$$

logo, obtemos que

$$A = O(\sqrt{\sigma_1})$$

E, portanto, termos cúbicos de A serão desprezados.

5.1.2. Cálculo dos termos \dot{q}_r , \ddot{q}_r e \dot{q}_r^3 .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \dot{q}_r &= \frac{1}{2} (i\omega e^{i\omega t} A - i\omega e^{-i\omega t} A^*) + \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right) \\ \ddot{q}_r &= -\omega^2 \left(\frac{1}{2} (e^{i\omega t} A + e^{-i\omega t} A^*) \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \left(i\omega e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} - i\omega e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right) \right) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} \frac{d^2 A}{dt^2} + e^{-i\omega t} \frac{d^2 A^*}{dt^2} \right)}_{\rightarrow 0} \\ \ddot{q}_r &= -\omega^2 q + \left(i\omega e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} - i\omega e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$(\dot{q}_r)^3 = \frac{1}{8} (i\omega e^{i\omega t} A - i\omega e^{-i\omega t} A^*)^3 + \frac{1}{8} \underbrace{\left(e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right)}_{\rightarrow 0}^3$$

$$(\dot{q}_r)^3 = \frac{1}{8} (i\omega e^{i\omega t} A - i\omega e^{-i\omega t} A^*)^3 + \frac{1}{8} \underbrace{\left(e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right)}_{\rightarrow 0}^3$$

$$\bullet \quad (\dot{q}_r)^3 = \frac{1}{8} \left(-i\omega^3 e^{3i\omega t} A^3 + 3i\omega^3 e^{i\omega t} |A|^2 A - 3i\omega^3 e^{-i\omega t} |A|^2 A^* + i\omega^3 e^{-3i\omega t} (A^*)^3 \right)$$

Substituindo-os na equação (5.5):

ficamos com

$$\begin{aligned} -\omega^2 q_r + \left(i\omega e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} - i\omega e^{-i\omega t} \frac{dA}{dt} \right) - 2\sigma \left(\frac{1}{2} (i\omega e^{i\omega t} A - i\omega e^{-i\omega t} A^*) \right) - 2\sigma \underbrace{\frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + e^{-i\omega t} \frac{dA^*}{dt} \right)}_{\rightarrow 0} + \\ + \frac{3\mu}{8} i\omega^3 e^{i\omega t} |A|^2 A + \frac{\mu}{8} \left(-i\omega^3 e^{3i\omega t} A^3 - 3i\omega^3 e^{-i\omega t} |A|^2 A^* + i\omega^3 e^{-3i\omega t} (A^*)^3 \right) + \omega^2 q_r = 0 \end{aligned}$$

Simplificando e multiplicando todos os termos por $e^{-i\omega t}$, ficamos com

$$\left(i\omega \frac{dA}{dt} - i\omega e^{-2i\omega t} \frac{dA}{dt} \right) - \sigma (i\omega A - i\omega e^{-2i\omega t} A^*) + \frac{3\mu}{8} i\omega^3 |A|^2 A + \frac{\mu}{8} \left(-i\omega^3 e^{2i\omega t} A^3 - 3i\omega^3 e^{-i\omega t} |A|^2 A^* + i\omega^3 e^{-3i\omega t} (A^*)^3 \right)$$

integrando em um período e reescrevendo obtemos

$$i\omega \frac{dA}{dt} - \sigma i\omega A + \frac{3\mu}{8} i\omega^3 |A|^2 A = 0$$

$$\frac{dA}{dt} - \sigma A + \frac{3\mu}{8} \omega^2 |A|^2 A = 0$$

$$\frac{dA}{dt} - \sigma A + \hat{\mu} |A|^2 A = 0 \quad (5.1.1.3)$$

que é a equação de Landau.

Ela é válida nas vizinhanças da bifurcação, onde $0 < \sigma \ll 1$ e as aproximações acima usadas são válidas.

A equação de Ginzburg-Landau é obtida somando-se o termo difusivo acoplado,

$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$, à equação de Landau:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} - \sigma \bar{A} + l \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{z}^2} - \mu |\bar{A}|^2 \bar{A} = 0 \quad (5.1.1.4)$$

A princípio seu domínio de validade ficaria também restrito ao á vizinhança de Reynolds crítico Rec , porém verifica-se que esta equação continua a modelar bem o fenômeno de vortex shedding mesmo para Re muito maiores que 45.

Isso nos leva a hipótese de que σ permanece entre $0 < \sigma \ll 1$ mesmo para $Re \gg 45$, fora das vizinhanças da bifurcação.

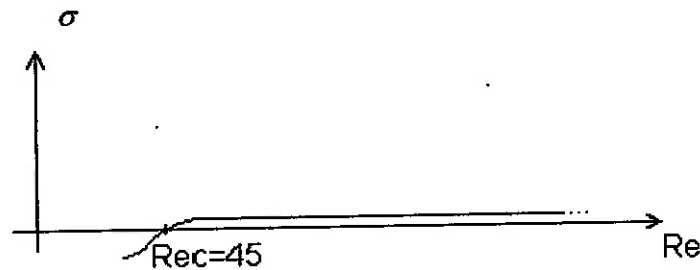


Figura 12 – Comportamento de σ em função de Re .

5.2. EGL – Re-escala

Na publicação a equação de Ginzburg-Landau é apresentada numa forma adimensionalizada. Essa forma é obtida realizando-se uma re-escala, já usual na literatura. Para isso, faz-se

Amplitude: $\bar{A} = A \sqrt{\frac{\mu_r}{\sigma_r}}$

Tempo: $\bar{t} = t \sigma_r \begin{cases} \sigma = \sigma_r + i \sigma_i \\ \mu = \mu_r + i \mu_i \\ \gamma = \gamma_r + i \gamma_i \end{cases}$

Espaço: $\bar{z} = z \sqrt{\frac{\sigma_r}{\gamma_r}}$

Os termos passam a

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \rightarrow \sigma_r \sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \sigma \bar{A} \rightarrow \sigma \sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} A$$

$$\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{z}^2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\sqrt{\frac{\sigma_r}{\gamma_r}} \sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \rightarrow \frac{\sigma_r}{\gamma_r} \sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$\mu |\bar{A}|^2 \bar{A} \rightarrow \mu \frac{\sigma_r}{\mu_r} \sqrt{\frac{\sigma_r}{\mu_r}} |A|^2 A$$

A equação de Ginzburg Landau fica então

$$\sigma_r \frac{\partial A}{\partial t} = \sigma A + \gamma \frac{\sigma_r}{\gamma_r} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mu \frac{\sigma_r}{\mu_r} |A|^2 A$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\sigma}{\sigma_r} A + \frac{\gamma}{\gamma_r} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\mu}{\mu_r} |A|^2 A$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{(\sigma_r + i\sigma_i)}{\sigma_r} A + \frac{(\gamma_r + i\gamma_i)}{\gamma_r} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{(\mu_r + i\mu_i)}{\mu_r} |A|^2 A$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 + ic_0) A + (1 + ic_1) \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - (1 + ic_2) |A|^2 A$$

onde:

$$c_0 = \frac{\sigma_i}{\sigma_r}, \quad c_1 = \frac{\gamma_i}{\gamma_r}, \quad c_2 = \frac{\mu_i}{\mu_r}$$

5.3. Solução analítica para a equação de Landau.

Tomando-se a aproximação de primeira ordem da equação de Landau

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} = \sigma \bar{A}$$

Se $\text{Re}(\sigma) > 0$, a solução é instável.

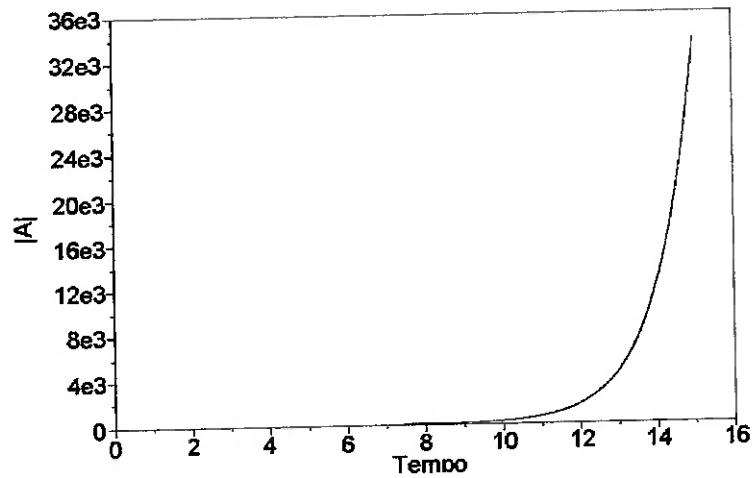


Figura 13 – Evolução temporal de A obtida da equação de Landau linearizada.

O termo não-linear, $\mu |\bar{A}|^2 \bar{A}$ desempenha o papel de limitador da solução.

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \sigma \bar{A} - \gamma |\bar{A}|^2 \bar{A}$$

Que com os coeficientes adimensionais fica

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 + ic_0) A - (1 + ic_2) |A|^2 A \quad (5.3.1)$$

Tomando-se uma solução do tipo $A(t) = A_0 e^{i\omega t}$, com

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i\omega A_0 e^{i\omega t} \text{ e } |A(t)| = |A_0| |e^{i\omega t}| = |A_0|$$

E substituindo em (5.3.1) obtemos

$$\begin{cases} i\omega = (1 + ic_0) - (1 + ic_2) |A_0|^2 \\ 0 = 1 - |A_0|^2 \end{cases}$$

$$\text{De onde obtemos: } \begin{cases} |A_0| = 1 \\ \omega = c_0 - c_2 \end{cases}$$

Para $\text{Re}=100$:

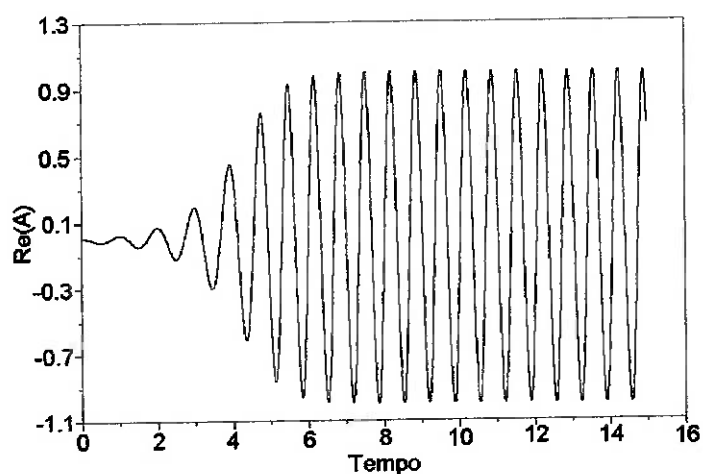


Figura 14 – Evolução temporal de A obtida da equação de Landau não-linearizada.

$$c_0 = 6,3533781$$

$$c_2 = -3,0$$

$$\omega = 9,3533781$$

$$f = 1,488636$$

6. Construção do Modelo Numérico da equação de Ginzburg-Landau

6.1. Método Explícito

Por este método as derivadas são reescritas como

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_M^P = \frac{A_M^{P+1} - A_M^P}{\Delta t}$$

$$\left. \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right|_M^P = \frac{A_{M+1}^P + A_{M-1}^P - 2A_M^P}{\Delta z^2}$$

Substituindo-as na equação de GL (5.1.1.4), tem-se

$$\frac{A_M^{P+1} - A_M^P}{\Delta t} = (1 + ic_0)A_M^P + (1 + ic_1) \frac{A_{M+1}^P + A_{M-1}^P - 2A_M^P}{\Delta z^2} - (1 + ic_2) |A_M^P|^2 A_M^P$$

$$A_M^{P+1} = A_M^P + \Delta t(1 + ic_0)A_M^P + \Delta t(1 + ic_1) \frac{A_{M+1}^P + A_{M-1}^P - 2A_M^P}{\Delta z^2} - \Delta t(1 + ic_2) |A_M^P|^2 A_M^P$$

Condições de contorno:

Nos nós extremos:

$$\frac{dA}{dz}_{\text{extremos}} = 0$$

A EGL discreta fica na forma

$$A_m^{p+1} = f(A_{m+1}^p, A_m^p, A_{m-1}^p, \Delta z, \Delta t, c_0, c_1, c_2)$$

O resultado obtido foi:

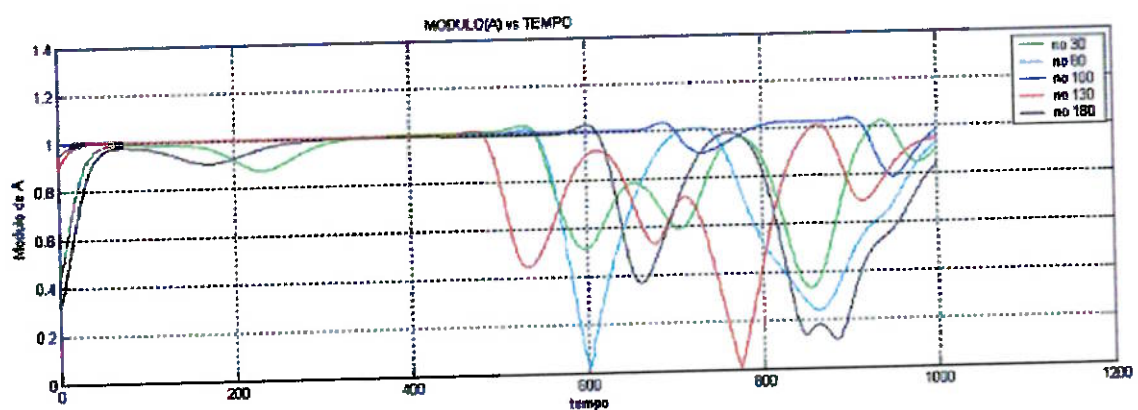


Figura 15 – Resultado da evolução temporal de $A(z,t)$ obtida de simulações com o método de diferenças finitas explícito para 6 nós diferentes.

Observa-se que para $t > 400$ a solução se desestabiliza e adquire um comportamento irregular.

No entanto fisicamente sabemos que ela deveria permanecer constante, o que nos leva a conclusão que erros numéricos associados ao método explícito são os responsáveis por tal comportamento.

Valores diferentes de parâmetros de simulação foram usados. Os valores para passo no tempo foram $10^{-6} < dt < 10^{-1}$; para o passo em z $0.01 < dz < 0.5$. Para todas as simulações surgiram instabilidades. Diferentes combinações de parâmetros apenas alteraram o instante em que as instabilidades começavam a aparecer.

Diferentes condições iniciais também apenas alteraram o instante em que as instabilidades começavam a aparecer.

Por esse motivo um novo método de diferenças finitas foi construído. Um método semi-implícito, com apenas o termo não linear, $\mu|A|^2 A$, explícito. Será apresentada também uma discussão comparativa sobre a convergência dos dois métodos.

6.2. Método Semi-implícito

Seja a equação de Ginzburg-Landau

$$\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma A - \underbrace{(\gamma_r + i\gamma_i)}_{\gamma} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \underbrace{(\mu_r + i\mu_i)}_{\mu} |A|^2 A = 0 \right. \quad (6.2.1)$$

Definida no intervalo $0 \leq z \leq L$, com $l = \frac{\hat{l}}{d}$ sendo a “razão de esbeltez” do riser e

sujeita a condições de contorno

$$\alpha_0 A(0, t) + \beta_0 \frac{\partial A}{\partial z}(0, t) = 0 \quad (6.2.2)$$

$$\alpha_L A(L, t) + \beta_L \frac{\partial A}{\partial z}(L, t) = 0 \quad (6.2.3)$$

Da expansão de Taylor nas vizinhanças de z ,

$$A(z \pm \Delta z, t) = A(z, t) \pm \frac{\partial A}{\partial z}(z, t) \Delta z + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}(z, t) \Delta z^2 \pm \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial z^3}(z, t) \Delta z^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 A}{\partial z^4}(z, t) \Delta z^4 + \dots$$

Obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, t) = \frac{1}{2\Delta z} [A(z + \Delta z, t) - A(z - \Delta z, t)] + O(\Delta z^2)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}(z, t) = \frac{1}{\Delta z^2} [A(z + \Delta z, t) - 2A(z, t) + A(z - \Delta z, t)] + O(\Delta z^2)$$

Definindo os pontos discretos com coordenadas $\{z_j = j \cdot \Delta z; j = 0, 1, \dots, L\}$ onde

$L\Delta z = l$ e designando

$$\{A_j = A(z_j, t)\}$$

Temos:

$$\left\{ \frac{\partial A_j}{\partial t} - \sigma A_j - \gamma \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_j + \mu |A_j|^2 A_j = 0 \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_j = \frac{1}{\Delta z^2} [A_{j+1}(t) - 2A_j(t) + A_{j-1}(t)] \right\}$$

As condições de contorno (6.2.2) e (6.2.3) são utilizadas para determinar o operador

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_j ; j = 0 \text{ e } j = l \right\}. \text{ Assim:}$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{2}{\Delta z^2} \left[A_1(t) - \left(1 - \Delta z \frac{\alpha_0}{\beta_0} \right) A_0(t) \right] \quad (\beta_0 \neq 0)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_l = \frac{2}{\Delta z^2} \left[A_{l-1}(t) - \left(1 + \Delta z \frac{\alpha_l}{\beta_l} \right) A_l(t) \right] \quad (\beta_l \neq 0)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{\Delta z^2} [A_1(t) - 2A_0(t) + A_{l-1}(t)] \quad (6.2.4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_{l-1} = \frac{1}{\Delta z^2} [A_0(t) - 2A_{l-1}(t) + A_{l-2}(t)] \quad (6.2.5)$$

6.2.1. Condições Iniciais

Com as adequações apropriadas nos pontos de contorno, ver (6.2.4) e (6.2.5), temos que integrar no tempo o sistema discreto de equações.

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} - \sigma A_j - \gamma \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_j + \mu |A_j|^2 A_j = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_j = \frac{1}{\Delta z^2} [A_{j+1}(t) - 2A_j(t) + A_{j-1}(t)]$$

Sujeito a certas condições iniciais que serão definidas posteriormente.

Consideremos a versão linear de (6.2.1) dada por

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \sigma A + \mu |A|^2 A = 0 \quad (6.2.6)$$

Sua solução geral pode ser escrita na forma de uma “série de Fourier” (ou “transformada”, quando $l \rightarrow \infty$), com parcelas da forma

$$A(z, t) = a_k(t) \cdot e^{ikz} \quad (6.2.7)$$

donde

$$\frac{da_k}{dt} - \sigma a_k + k^2 \gamma a_k = 0 \quad (6.2.8)$$

Para $\sigma > k^2 \gamma$ a solução de (6.2.8) é exponencialmente crescente e, como já dito anteriormente, somente o termo não linear de (6.2.1) é capaz de limitar a solução.

Para ondas curtas ($\sigma < k^2 \gamma$) a solução de (6.2.8) é exponencialmente decrescente.

Colocando (6.2.7) em (6.2.4) obtemos

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\frac{2}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) \cdot a_k(t) e^{ikz}$$

E o sistema discreto (6.2.4) toma então a forma

$$\frac{da_k}{dt} - \sigma a_k + \frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) \cdot a_k(t) = 0 \quad (6.2.9)$$

Quando $k\Delta z \ll 1$ o sistema (6.2.9) reduz-se, com erro de forma de $[1 + O(k\Delta z)^2]$, ao sistema (6.2.8). O problema todo reside, como veremos, no limite de ondas curtas do sistema discreto, onde $k\Delta z \approx O(1)$.

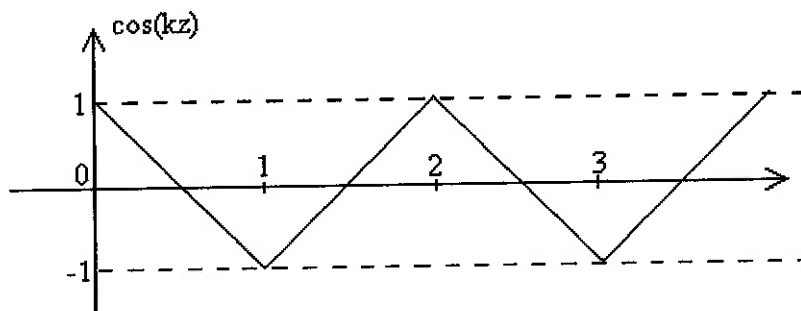


Figura 16 – Menor comprimento de onda que pode ser representado em uma

discretização; $k = \frac{\pi}{\Delta z}$.

e a **instabilidade numérica** tende, como veremos, a hipertrofiar justamente essas componentes mais curtas que, são inevitáveis devido a perturbações numéricas.

6.2.2. Discretização no tempo

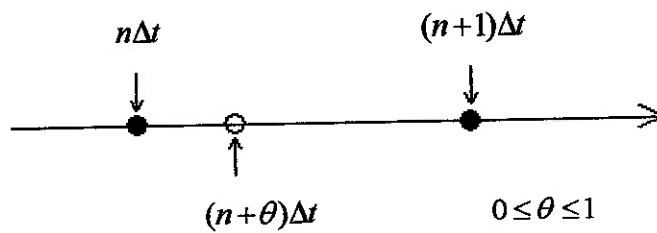
Consideremos a discretização no tempo do sistema linear (6.2.9) que é a aqui reescrito na forma

$$\frac{da_k}{dt} = - \left[\frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) - \sigma \right] a_k(t) \quad (6.2.2.1)$$

Se Δt for o incremento no tempo definimos

$$a_k^{(n)} = a_k(n\Delta t) \quad (6.2.2.2)$$

E consideremos a função $a_k(t)$ no intervalo $n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t$



Desenvolvendo em série de Taylor a função $a_k(t)$ no entorno do ponto

$(n+\theta)\Delta t$, com $0 \leq \theta \leq 1$, e designando por $a_k^{(n+\theta)} = a_k[(n+\theta)\Delta t]$ temos

$$a_k^{(n+1)} = a_k^{(n+\theta)} + \dot{a}_k^{(n+\theta)}(1-\theta)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{a}_k^{(n+\theta)}(1-\theta)^2\Delta t^2 + O(\Delta t)^3$$

$$a_k^{(n)} = a_k^{(n+\theta)} - \dot{a}_k^{(n+\theta)}\theta\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{a}_k^{(n+\theta)}\theta^2\Delta t^2 + O(\Delta t)^3$$

E, portanto

$$a_k^{(n+1)} = (1-\theta)a_k^{(n)} + \theta a_k^{(n+1)} + O(\Delta t)^2 \quad (6.2.2.3)$$

$$\dot{a}_k^{(n+\theta)} = \frac{a_k^{(n+1)} - a_k^{(n)}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\ddot{a}_k^{(n+\theta)}[\theta^2 - (1-\theta)^2]\Delta t^2 + O(\Delta t)^2 \quad (6.2.2.4)$$

Para $\theta \neq \frac{1}{2}$ o erro em (6.2.2.3) e (6.2.2.4) para a aproximação $\dot{a}_k^{(n+\theta)}$ é da ordem de $O(\Delta t)$; para $\theta = \frac{1}{2}$ (esquema de Crank-Nicholson) esse erro é da ordem de $O(\Delta t)^2$. Como veremos no próximo item, o esquema de Crank-Nicholson é, no entanto, **implícito**, isto é, ele exige a solução de um sistema linear a cada passo Δt no tempo. Nesse sentido, parece ser interessante a escolha $\theta = 0$ que leva a um sistema explícito, onde a inversão de matrizes é evitada. Como veremos a seguir, o esquema explícito ($\theta = 0$) leva a um problema de **instabilidade numérica** que só pode ser contornado com um Δt muito pequeno. Assim, utilizando a aproximação

$$\dot{a}_k^{(n+\theta)} = \frac{a_k^{(n+1)} - a_k^{(n)}}{\Delta t} + O[(2\theta - 1)\Delta t; \Delta t^2]$$

Em (6.2.2.1) e aplicando essa equação no tempo $(n + \theta)\Delta t$, temos

$$\left\{ 1 + \theta \Delta t \left(\frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) - \sigma \right) \right\} a_k^{(n+1)} = \left\{ 1 - (1 - \theta) \Delta t \left(\frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) - \sigma \right) \right\} a_k^{(n)}$$

E definindo

$$G(\Delta t, \theta) = \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t \left[\frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) - \sigma \right]}{1 + \theta \Delta t \left[\frac{2\gamma}{\Delta z^2} (1 - \cos k\Delta z) - \sigma \right]}$$

Temos

$$a_k^{(n+1)} = [G(\Delta t, \theta)] a_k^{(n)}$$

E portanto

$$a_k^{(n)} = [G(\Delta t, \theta)]^n a_k^{(0)}$$

Óbvio, se $|G(\Delta t, \theta)| < 1$ a solução tende a zero no infinito ($a_k^{(n)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$) e, de outro lado, se $|G(\Delta t, \theta)| > 1$, a solução tende ao infinito ($a_k^{(n)} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$).

A discretização para um dado Δz é apropriada para representar bem os modos-k com $k\Delta z \ll 1$. Pois nesta situação temos

$$G(\Delta t, \theta)|_{k\Delta z \ll 1} = \frac{1 - (1 - \theta)\Delta t(k^2\gamma - \sigma)}{1 + \theta\Delta t(k^2\gamma - \sigma)} \cong 1 - \Delta t(k^2\gamma - \sigma) + O(\Delta t)^2$$

E portanto

$$|G(\Delta t, \theta)|_{k\Delta z \ll 1} \cong 1 - 2\Delta t(k^2\gamma_R - \sigma) + O(\Delta t)^2$$

Concluimos assim que a solução numérica tende a zero quando $k^2 > \frac{\sigma}{\gamma_R}$ e ao

infinito quando $k^2 < \frac{\sigma}{\gamma_R}$, preservando a condição $k\Delta z \ll 1$. Este resultado é

consistente com o que se obtém a partir da análise da solução da equação linear (6.2.2.1).

De outro lado, se $k\Delta z \approx O(1)$ - por exemplo, se $k\Delta z = \pi$, a onda “mais curta” permitida na discretização - temos

$$G_{\frac{\pi}{\Delta z}}(\Delta t, \theta = 0) = (1 + \sigma\Delta t) - 4\gamma \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

$$G_{\frac{\pi}{\Delta z}}(\Delta t, \theta = \frac{1}{2}) = \frac{1 + \frac{1}{2}\sigma\Delta t - 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}{1 - \frac{1}{2}\sigma\Delta t + 2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}$$

Observando que $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$, com $\gamma_R > 0$, e que $2\gamma \frac{\Delta t}{\Delta z^2} > \frac{1}{2}\sigma\Delta t$, é trivial

verificarmos que

$$\left| G_{\frac{\pi}{\Delta z}}(\Delta t, \theta = \frac{1}{2}) \right| = \left| \frac{\left[1 - \left(2\gamma_R \frac{\Delta t}{\Delta z^2} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \right) \right] - i2\gamma_I \frac{\Delta t}{\Delta z^2}}{\left[1 + \left(2\gamma_R \frac{\Delta t}{\Delta z^2} - \frac{1}{2}\sigma\Delta t \right) \right] + i2\gamma_I \frac{\Delta t}{\Delta z^2}} \right| < 1$$

Ou seja, o esquema implícito de Crank-Nicholson $\left(\theta = \frac{1}{2}\right)$ naturalmente **amortece** as componentes de alta – frequência $k\Delta z \approx O(1)$ e que não devem, de fato, desempenhar papel relevante se o Δz for bem escolhido. De outro lado, para o sistema explícito $(\theta = 0)$ temos que a “condição de estabilidade” $G_{\frac{\pi}{\Delta z}}(\Delta t, \theta = 0) < 1$ será satisfeita de e somente se

$$\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\gamma_R}{\gamma_R^2 + \gamma_I^2} \left[1 - \frac{\gamma_I^2}{\gamma_R^2 + \gamma_I^2} \frac{\sigma}{4\gamma_R} \Delta z^2 + O(\Delta t)^4 \right] \quad (6.2.2.5)$$

Portanto, mesmo que $(\Delta t \rightarrow 0; \Delta z \rightarrow 0)$, se $\frac{\Delta t}{\Delta z^2} > \frac{1}{2} \frac{\gamma_R}{\gamma_R^2 + \gamma_I^2}$ estão as ondas **mais curtas serão amplificadas neste esquema numérico** e a solução numérica jamais poderá convergir para a solução exata.

A parcela não-linear pode, do ponto de vista qualitativo, ser incorporada no fator σ através da transformação $\sigma \leftarrow \sigma - \mu_R |a_k|^2$ e como $\mu_R > 0$ de (6.2.2.5) concluímos que, em tese ao menos, **a parcela não linear tende a desestabilizar essa solução numérica** (embora a parcela não linear seja a “estabilizadora” da solução em tempo contínuo).

6.2.3. Crank-Nicholson semi-implícito

Aplicando o esquema Crank-Nicholson a equação (3b) obtemos

$$A_j^{(n+1)} - \frac{\Delta t}{2} \left[\sigma A_j^{(n+1)} + \gamma \left(\frac{\partial^2 A^{(n+1)}}{\Delta z^2} \right)_j - \mu |\tilde{A}_j^{(n+1)}|^2 A_j^{(n+1)} \right] = \dots A_j^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \left[\sigma A_j^{(n)} + \gamma \left(\frac{\partial^2 A^{(n)}}{\Delta z^2} \right)_j - \mu |\tilde{A}_j^{(n)}|^2 A_j^{(n)} \right] \quad (6.2.3.1)$$

E para evitar a não linearidade da parcela $|\tilde{A}_j^{(n+1)}|^2$ utilizaremos aí a “predição explícita”

$$\tilde{A}_j^{(n+1)} = A_j^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \left[\sigma A_j^{(n)} + \gamma \left(\frac{\partial^2 A^{(n)}}{\Delta z^2} \right)_j - \mu |\tilde{A}_j^{(n)}|^2 A_j^{(n)} \right] \quad (6.2.3.2)$$

Supondo que $(\sigma; \gamma; \mu)$ possam variar com z , tomando valores $\{(\sigma_j; \gamma_j; \mu_j); j = 0, 1, 2, \dots, L\}$ e introduzindo os coeficientes

$$\begin{aligned} Q_j^{(n+1)} &= \frac{1}{2} [\tilde{A}_j^{(n+1)} + A_j^{(n)}] \\ M_j &= \frac{\gamma_j}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \\ N_j^{(n+1)} &= 1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma_j - \frac{2\gamma_j}{\Delta z^2} - \mu_j |\tilde{A}_j^{(n+1)}|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.2.3.3)$$

Temos que resolver o sistema linear

$$\{-M_j A_j^{(n+1)} + N_j^{(n+1)} A_j^{(n+1)} - M_j A_{j+1}^{(n+1)} = Q_j^{(n+1)} \quad (6.2.3.4)$$

6.2.4. Condições de contorno

$$a) \quad \left\{ \alpha_0 A(0, t) + \beta_0 \frac{\partial A}{\partial z}(0, t) = 0 : \right.$$

Com $\beta_0 \neq 0$ e $\alpha_0 = 0$.

$$N_0 = 1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma_0 - \frac{2\gamma_0}{\Delta z^2} - \mu_0 |\tilde{A}_0^{(n+1)}|^2 \right)$$

$$M_0 = \gamma_0 \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

- $N_0 A_0^{(n+1)} - M_0 A_1^{(n+1)} = Q_0^{(n+1)}$
- $-M_1 A_0^{(n+1)} + N_1 A_1^{(n+1)} - M_1 A_2^{(n+1)} = Q_1^{(n+1)}$
- ...

$$\left\{ \alpha_l A(l, t) + \beta_l \frac{\partial A}{\partial z}(l, t) = 0 : \right.$$

Com $\beta_i \neq 0$ e $\alpha_i = 0$.

$$N_L = 1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma_L - \frac{2\gamma_L}{\Delta z^2} - \mu_L |\tilde{A}_L^{(n+1)}|^2 \right)$$

$$M_L = \gamma_L \frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

Resultados obtidos de simulações com método semi-implícito

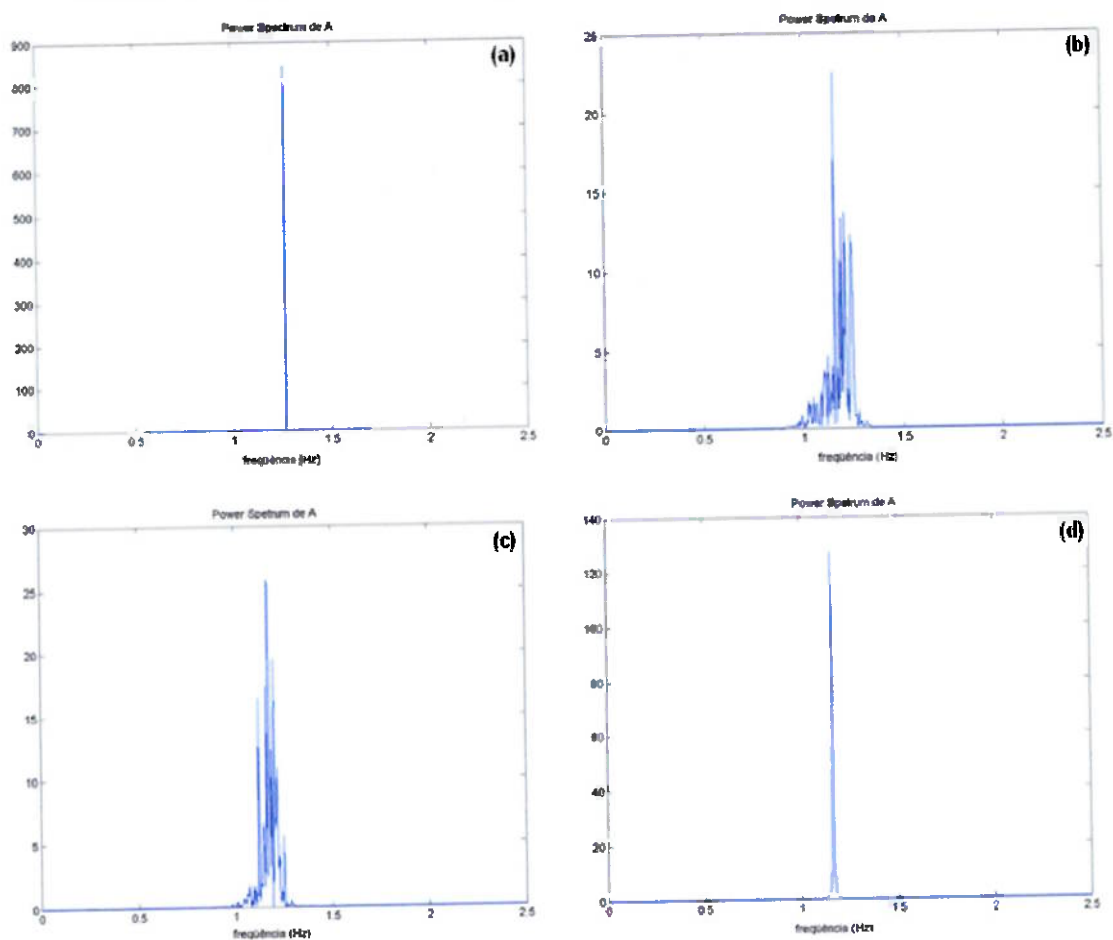


Figura 17 – Spectro no tempo da amplitude $A(z,t)$ da equação de Ginzburg Landau obtido de simulações numéricas com o método semi-implícito. (a) $Re = 164$; (b) $Re = 191$; (c) $Re = 218$; (d) $Re = 309$

Notamos que, como nos resultados apresentados pela publicação:

- Para $Re = 164$ o espectro apresenta apenas um pico fino.
- Para $Re = 191$ e $Re = 218$ o espectro sofre um alargamento.
- Para $Re = 191$ e $Re = 218$ o surge um segundo pico com menor intensidade.
- Para $Re = 309$ o espectro volta a apresentar apenas um pico fino.

Para construção da curva $S \times Re$ foram tomados os valores das frequências associadas aos dois picos.

Houve uma grande dificuldade em tomar o segundo pico, já que não é muito pronunciado e, para muitos valores de Re , se confunde com ruídos do espectro. Esses ruídos são devido ao fato do sinal usado para construí-lo não ser infinito.

Apesar disso os resultados obtidos apresentam boa concordância com os apresentados na publicação se considerados os erros associados às medidas dos gráficos.

Os valores medidos na publicação e nas simulações feitas, para a região de transição onde houve maior dificuldade na obtenção dos valores a partir das simulações, são apresentados abaixo:

Resultados de simulações:

Re	Strouhal	
170	0.1720	0.1844
180	0.17385	0.1848
190	0.17805	0.1869
200	0.1803	0.1880
210	0.1825	
220	0.1861	0.190
230	0.1856	0.1942
240	0.18675	0.1955
250	0.1912	0.1970
260	0.19185	0.1985
270	0.1942	0.1968
280	0.1943	0.1992
290	0.1955	0.2032
300	0.1965	
310	0.1975	

Valores medidos dos gráficos da publicação:

Re	Strouhal	
170	0,178	0,188
180	0,176	0,186
190	0,18	
200	0,182	0,191
210	0,184	0,193
220	0,186	0,195
230	0,187	0,196
240	0,189	0,1975
250	0,191	0,1985
260	0,194	0,199
270	0,196	0,201
280	0,1975	0,202
290	0,198	0,202
300	0,199	0,201
310	0,2	

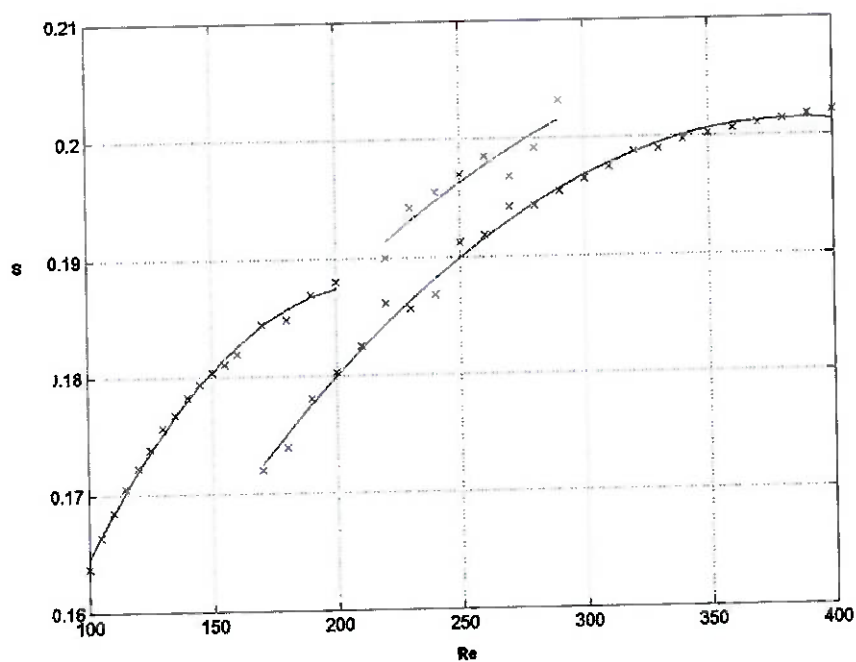


Figura 18 – Relação entre S-Re resultante dos espectros obtidos de simulações com o método semi-implícito. O número de Strouhal foi calculado como

$$S = \frac{R_o}{R_e} = \left(\frac{k}{2\pi} \right) f_{GL} \left(\frac{Re - Rec}{Re} \right).$$

Foram também obtidos gráficos de $A(z,t)$ em função do tempo e de z :

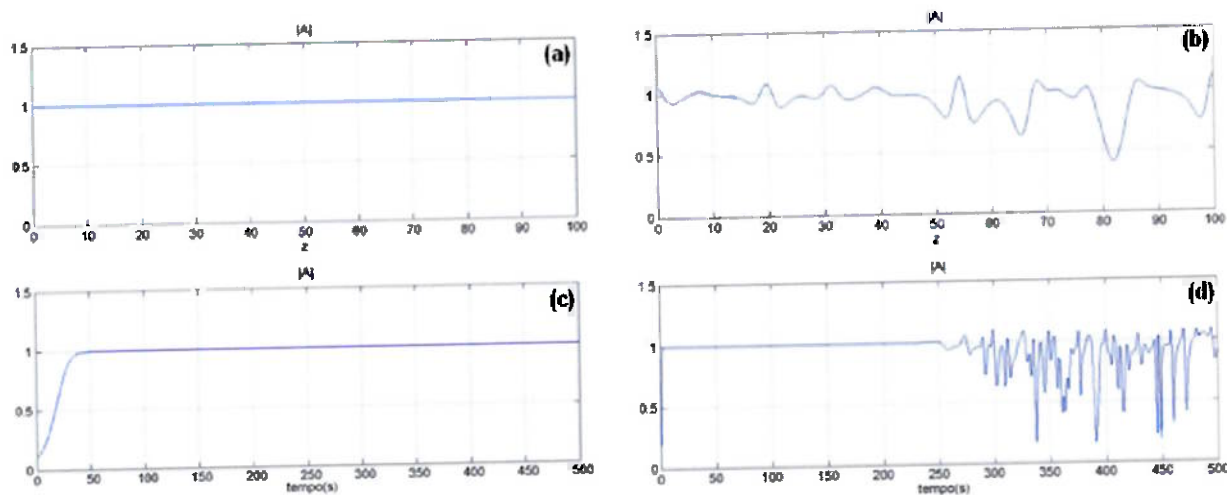


Figura 19 – $A(z,t)$ em função do tempo e da posição longitudinal z obtido de simulações com o método semi-implícito. (a) e (c) $Re = 100$; (b) e (d) $Re = 230$.

Observa-se que para $Re = 164$ o módulo de A , $|A|$, permanece constante $|A| = 1,033$, próximo de $|A| = 1$ como calculado para a equação de Landau.

Para $Re = 218$, na região de caos, a amplitude adquire um comportamento irregular, como esperado.

Plotando-se gráficos das partes real e imaginária de A notamos que são senóides em oposição de fase.

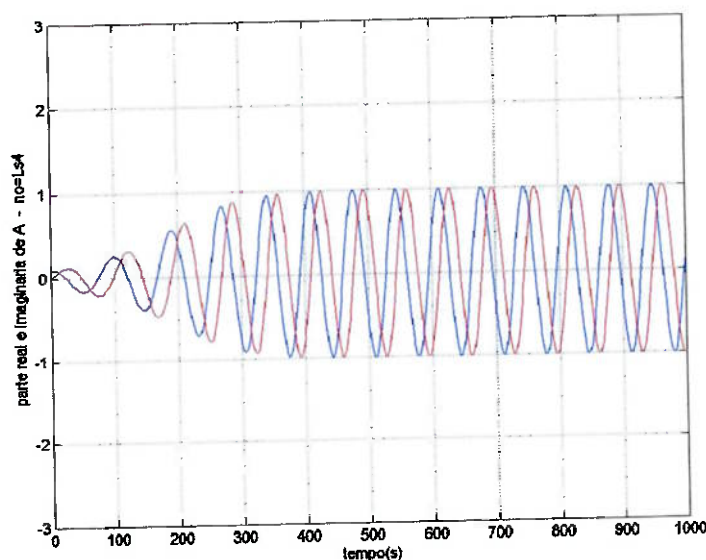


Figura 20 – partes real e imaginária de $A(z,t)$ em função do tempo. Nó

$$\text{correspondente a } z = \frac{L}{4}$$

Projeções no plano de curvas de fase constante, curvas de nível da fase de A , concordam com as visualizações apresentadas nas figuras (2) e (3). Para $Re = 100$, que esta dentro da faixa de emissões paralelas obtemos curvas de nível paralelas. Para $Re = 218$ curvas que representam o comportamento irregular da transição. As curvas de nível para $Re > 300$ voltam a ser paralelas, análogas às para $Re = 100$.

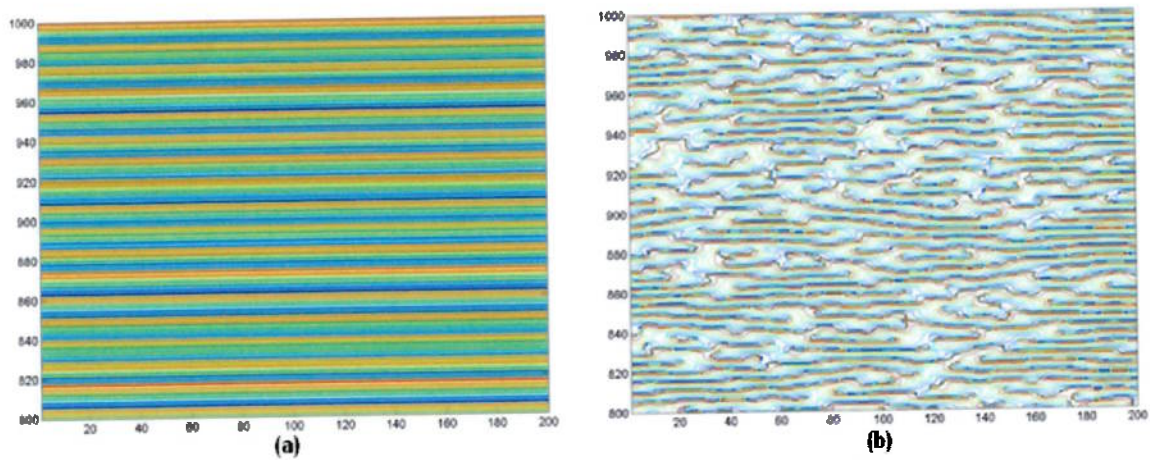


Figura 21 – Projeções no plano de curvas de fase constante. (a) $\text{Re} = 100$; (b) $\text{Re} = 218$.

Seja o gráfico da parte real de A em função do tempo para $\text{Re} = 218$, e uma ampliação de um trecho dele.

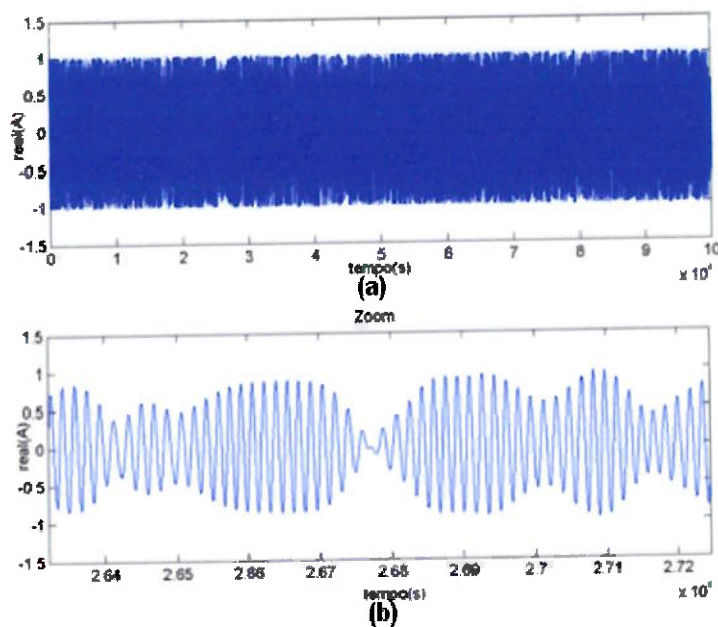


Figura 22 – Evolução temporal da parte real de A no nó correspondente a $z = \frac{L}{4}$;

Grande tempo de simulação . (a) Sinal total simulado; (b) Ampliação de um trecho.

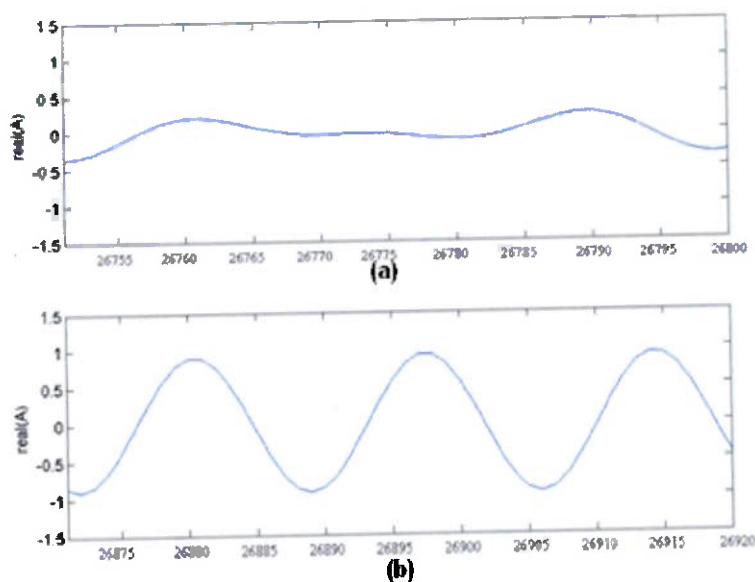


Figura 23 – Trechos do sinal total tomados para calculo do espectro “local”.

Calculando-se o espectro do trecho de maior amplitude, do de menor amplitude e comparando com o espectro do sinal todo podemos tirar algumas conclusões.

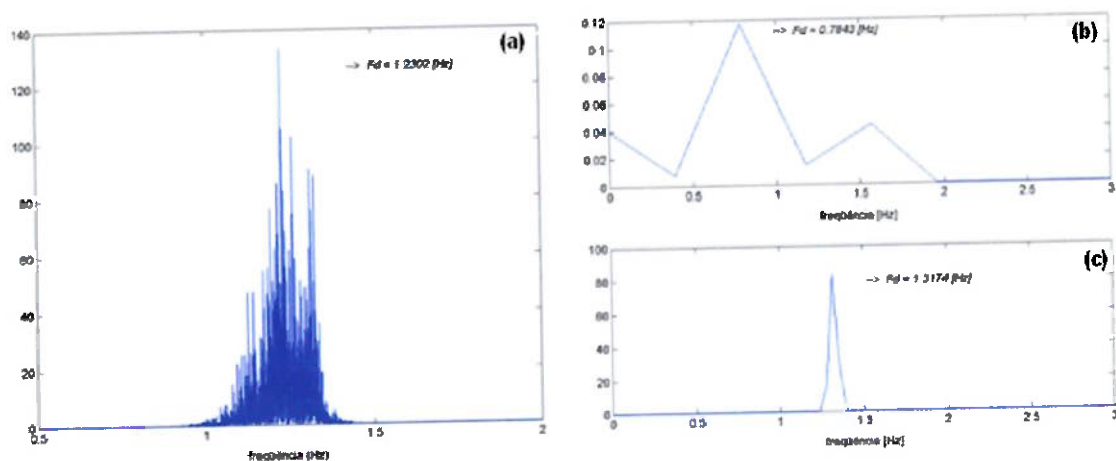


Figura 24 – Espectro de $A(z,t)$. (a) Espectro do sinal completo; (b) Espectro do trecho correspondente à figura 23(a); (c) Espectro do trecho correspondente à figura 23(b);

Trechos de menor amplitude têm menor frequência e os de maior amplitude têm maior frequência. As variações de frequência são contínuas e oscilantes entre aproximadamente

$$f=1 \text{ Hz e } f=1.5 \text{ Hz.}$$

7. Condições de contorno periódicas

Retomando o método de Crank-Nicholson semi-implícito aplicado a equação de Ginzburg-Landau

$$\left\{ -M_j \cdot A_j^{(n+1)} + N_j^{(n+1)} \cdot A_j^{(n+1)} - M_j \cdot A_{j+1}^{(n+1)} = Q_j^{(n+1)} \right. \quad (6.2.3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_j^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \left[\tilde{A}_j^{(n+1)} + A_j^{(n)} \right] \\ M_j &= \frac{\gamma_j}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \\ N_j^{(n+1)} &= 1 - \frac{\Delta t}{2} \left(\sigma_j - \frac{2\gamma_j}{\Delta z^2} - \mu_j \left| \tilde{A}_j^{(n+1)} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (6.2.3.3)$$

Com condições de contorno periódicas os comportamento das propriedades no nó de coordenada z são iguais as propriedades do nó de coordenada $z-l$, assim

$$A(z+l, t) = A(z, t)$$

Neste caso a solução necessita ser aplicada somente nos nós $\{j = 0, 1, 2, \dots, l-1\}$, já que a equação no nó (l) é uma repetição da equação no nó $j = 0$. Assim temos

$$A_0(t) = A_l(t); \quad A_{-1}(t) = A_{l-1}(t)$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{1}{\Delta z^2} [A_l(t) - 2A_0(t) + A_{l-1}(t)]$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)_{l-1} = \frac{1}{\Delta z^2} [A_0(t) - 2A_{l-1}(t) + A_{l-2}(t)]$$

Assim o sistema correspondente a (6.2.3.4) será ($M_j = cte = M$)

$$\begin{bmatrix} N_0 & -M & \dots & \dots & -M \\ -M & N_1 & -M & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -M & N_{L-2} & -M \\ -M & \dots & \dots & -M & N_{L-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{L-2} \\ A_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{L-2} \\ Q_{L-1} \end{bmatrix}$$

Com N_j, M_j e Q_j dados por (6.2.3.3).

7.1.1. Resultados de simulações com condições de contorno periódicas

Resultados de simulações:

Valores medidos dos gráficos da publicação:

Re	Strouhal		Re	Strouhal	
170	0.178	0.187	170	0,178	0,188
180	0.174	0.185	180	0,176	0,186
190	0.179		190	0,18	
200	0.184	0.189	200	0,182	0,191
210	0.1825	0,1927	210	0,184	0,193
220	0.1861	0.193	220	0,186	0,195
230	0.185	0.194	230	0,187	0,196
240	0.188	0.198	240	0,189	0,1975
250	0.191	0.1981	250	0,191	0,1985
260	0.195	0.198	260	0,194	0,199
270	0.196	0.200	270	0,196	0,201
280	0.199	0.2015	280	0,1975	0,202
290	0.190	0.203	290	0,198	0,202
300	0.1965	0,202	300	0,199	0,201

Observamos que com essa condição de contorno conseguimos os seguintes resultados:

1) Maior precisão nos resultados de frequências obtidos de espectros de frequência dos sinais.

2) Coincidência na posição da descontinuidade.

As figuras abaixo mostram alguns exemplos de espectros obtidos

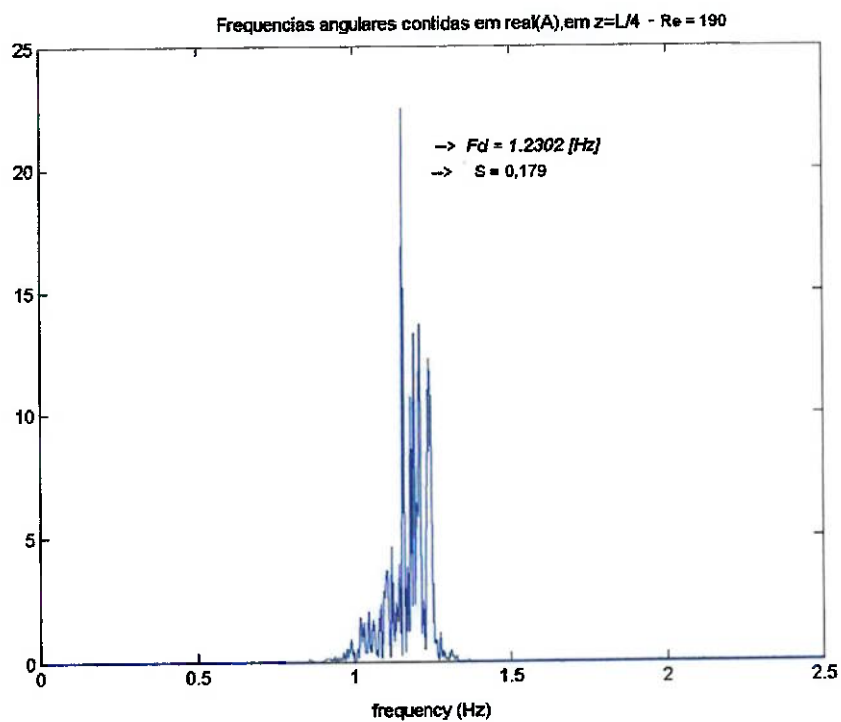


Figura 25 - Espectro no tempo da amplitude $A(z,t)$ - $\text{Re} = 190$

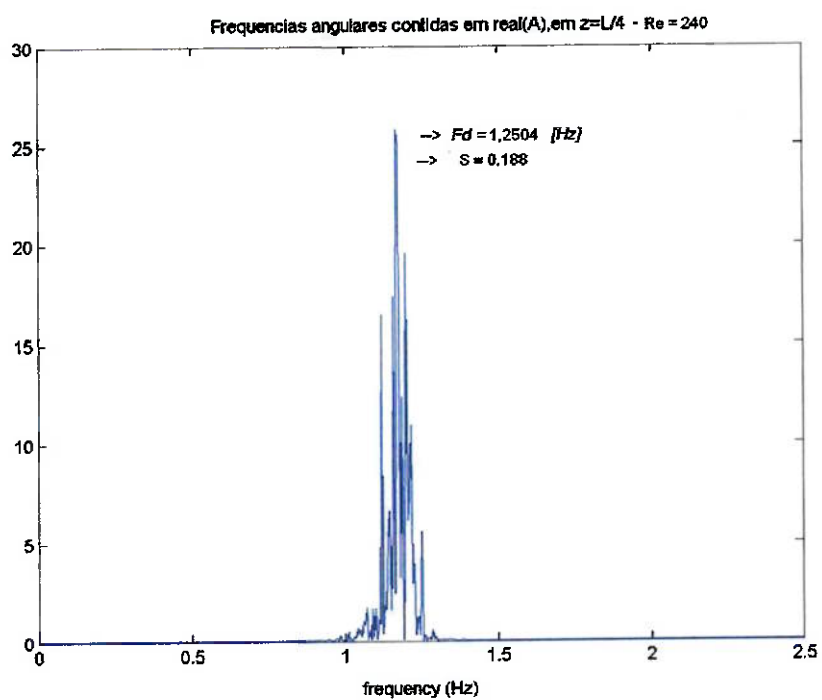


Figura 26 - Espectro no tempo da amplitude $A(z,t)$ - $\text{Re} = 240$.

A figura abaixo mostra o mesmo espectro que o anterior, porém com uma curva que interpola a do espectro.

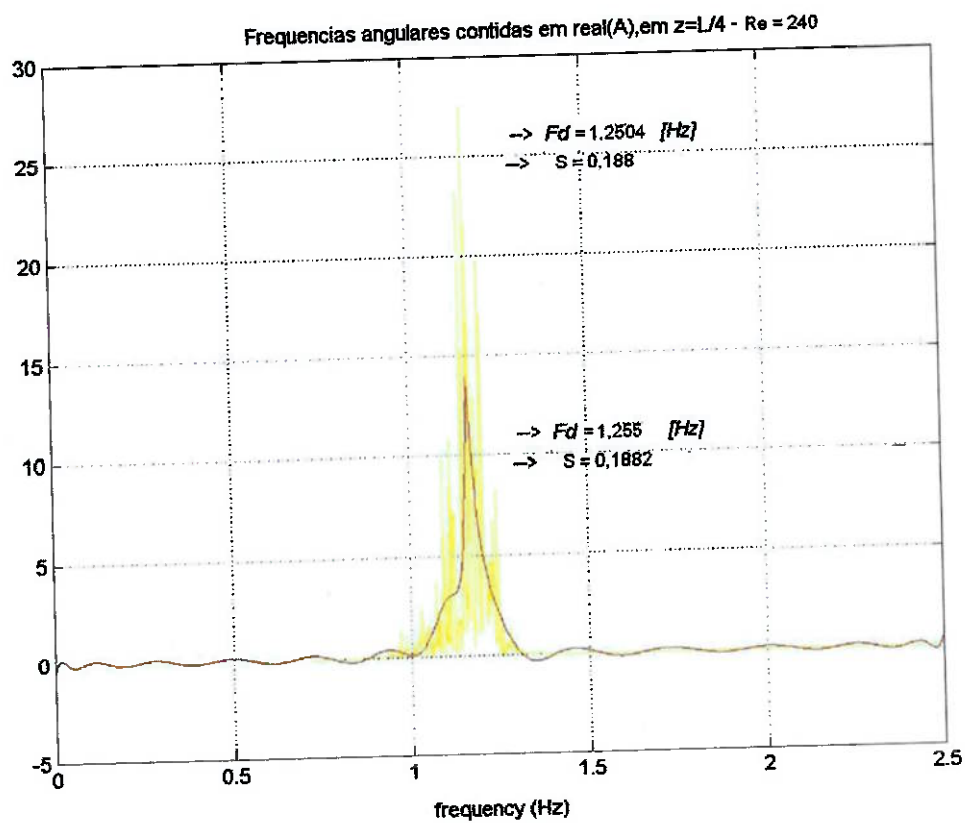


Figura 27 - Espectro no tempo da amplitude $A(z,t)$ - $\text{Re} = 240$ - Curva com interpolação.

As figuras abaixo mostram o comportamento de $|A|$ em função do tempo e em função da posição longitudinal z . Observa-se que os resultados são semelhantes os obtidos com condições de contorno $\frac{\partial A}{\partial z}\bigg|_{z=0,L} = 0$.

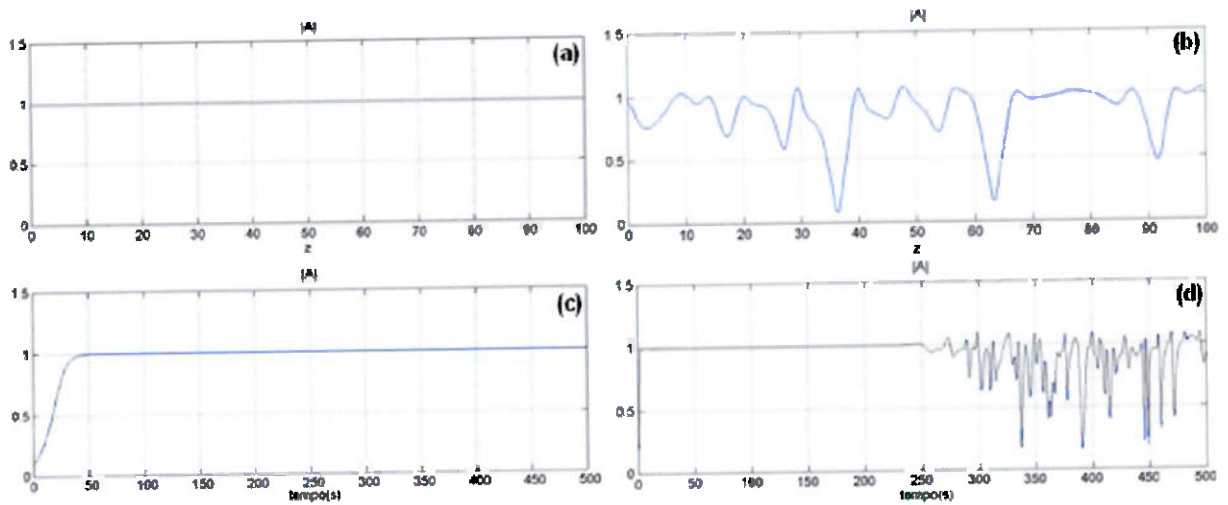


Figura 28 – $A(z,t)$ em função do tempo e da posição longitudinal z obtido de simulações com o condições de contorno periódicas. (a) e (c) $Re = 100$; (b) e (d) $Re = 200$.

8. Conclusões

Os resultados obtidos pelas simulações feitas recuperaram todos os resultados da publicação.

Usando-se derivadas nulas de A nas extremidades do cilindro como condições de contorno observou-se boa concordância do ponto de vista qualitativo com as características da região de transição.

Com condições de contorno periódicas observou-se boa concordância do ponto de vista qualitativo e quantitativo. Os valores obtidos de frequência em função do número de Reynolds e a posição da descontinuidade apresentaram uma precisão muito boa.

A partir disso concluímos que o modelo numérico apresenta robustez e é confiável para descrição do comportamento na esteira na região de transição e possivelmente fora dela, para maiores valores de Reynolds.

Um fator limitante dessa abordagem fenomenológica é que a compreensão de detalhes da física básica que controla o fenômeno fica um pouco deixada de lado.

9. Referências bibliográficas

- [1] MONTEIRO, L., **Sistemas Dinâmicos**, Editora da Física, 2000.
- [2] T. LEWEKE and M. PORVANSAL, **Model of the Transition in Bluff Body Wakes**, Physical Review Letters, 1994.
- [3] ARANHA, J.A.P. e PARRA, P., **Vibrações Induzidas por Emissão de Vórtices: Modelo Fenomenológico e Experimentos**.
- [4] ARANHA, J.A.P, **Weak Three Dimensionality of a Flow around a Slender Cylinder: the Ginzburg-Landau Equation**.
- [5] MENEGHINI, J.R., **Projetos de Pesquisa no Tópico Geração de Vórtices no escoamento ao Redor de Cilindros**.